4.3.6 Základní goniometrické vzorce II

Předpoklady: 040305

Pedagogická poznámka: Při procvičování úprav je dokazování rovností zařazeno před zjednodušování výrazů záměrně. Při dokazování rovností mohou studenti používat i ekvivalentní úpravy (násobení rovnic apod.), které se potom někteří snaží uplatnit i u výrazů. Opět je v takovém případě (až po chybách) potřeba třídu upozornit, že jde o dva rozdílné úkoly, které je nutné řešit různými způsoby.

Připomenutí:
- $y = \sin x$ je lichá funkce $\Rightarrow$ platí $\sin(-x) = -\sin x$,
- $y = \cos x$ je sudá funkce $\Rightarrow$ platí $\cos(-x) = \cos x$.

Známe dva vztahy mezi goniometrickými funkcemi $\Rightarrow$ je možné vymyslet mnoho dalších rovností, které je pak třeba dokazovat.

Jak například dokázat, že platí rovnost: $\dfrac{1+\sin x}{\sin x \cdot \cos(-x)} = \dfrac{\operatorname{cotg} x}{1+\sin(-x)}$?

Nejdříve musíme zjistit, pro která x je rovnost definována:
- použité funkce $\operatorname{cotg} x \Rightarrow x \neq k\pi$, $k \in Z$
- zlomky: $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$, $k \in Z$

  $\cos(-x) = \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$

  $1+\sin(-x) = 1-\sin x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 1 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$

$$\Rightarrow x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

Dokazujeme rovnost $\Rightarrow$ můžeme upravovat jako rovnici až do okamžiku, kdy na obou stranách získáme stejné výrazy.

$$\frac{1+\sin x}{\sin x \cdot \cos(-x)} = \frac{\operatorname{cotg} x}{1+\sin(-x)} \qquad \text{odstraníme výrazy } (-x) \text{ uvnitř funkcí}$$

$$\frac{1+\sin x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{cotg} x}{1-\sin x} \quad / \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (1-\sin x) \qquad \text{odstraníme zlomky (výhoda)}$$

$$(1+\sin x)(1-\sin x) = \operatorname{cotg} x \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$1-\sin^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x \qquad \text{rovnost platí.}$$

Pedagogická poznámka: V některých případech je nutná diskuse o tom, že platnost rovnosti znamená, že při dosazení libovolného čísla z definičního oboru, vyjde na obou stranách stejná hodnota.

Př. 1: Urči, kdy je definovaná rovnost $\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{1+\sin(-x)}{\cos(-x)}$, a pak ji dokaž.

Na obou stranách rovnosti jsou zlomky $\Rightarrow$ nesmíme dělit nulou:

- $1+\sin x\neq 0 \Rightarrow \sin x\neq -1 \Rightarrow x\neq \frac{3}{2}\pi+k\cdot 2\pi,\ k\in Z$
- $\cos(-x)\neq 0 \Rightarrow \cos x\neq 0 \Rightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in Z$

$\Rightarrow x\in R-\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right\}$

Odstraníme znaménka uvnitř funkcí: $\sin(-x)=-\sin x$ (lichá fce), $\cos(-x)=\cos x$ (sudá fce).

$\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos x} \quad /\cdot(1+\sin x)\cos x$

$\cos x\cdot\cos x=(1-\sin x)(1+\sin x)$

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$\cos^2 x=\cos^2 x$

Př. 2: Urči definiční obory následujících rovností a dokaž je.

a) $\sin x\cdot \operatorname{tg} x\cdot\cos x=1-\cos^2 x$ b) $\sin^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x$

c) $2\sin x\cos x+\operatorname{tg} x\operatorname{cotg} x=\left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}+\frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x}\right)^2$

a) $\sin x\cdot \operatorname{tg} x\cdot\cos x=1-\cos^2 x$

Rovnost obsahuje funkci $\operatorname{tg} x \Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, kde $k\in Z \Rightarrow x\in R-\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right\}$.

$\sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x=\sin^2 x$

$\sin^2 x=\sin^2 x \Rightarrow$ rovnost platí.

b) $\sin^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x$

$x\in R$

$(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos^2 x$

$(\sin^2 x-\cos^2 x)\cdot 1=\sin^2 x-\cos^2 x \Rightarrow$ rovnost platí.

c) $2\sin x\cos x+\operatorname{tg} x\operatorname{cotg} x=\left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}+\frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x}\right)^2$

Rovnost obsahuje funkci $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x \Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x\neq 0+k\pi \Rightarrow x\neq 0+k\frac{\pi}{2}$, kde $k\in Z$.

Tím jsme vyřešili i hodnoty *x*, pro které platí $\operatorname{tg} x=0$ nebo $\operatorname{cotg} x$ (když je jedna z těchto funkcí nulová, druhá není definována) $\Rightarrow x\in R-\bigcup_{k\in Z}\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$.

$$2\sin x\cos x+\operatorname{tg}x\operatorname{cotg}x=\left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}+\frac{\cos x}{\operatorname{cotg}x}\right)^2$$

$$2\sin x\cos x+1=\left(\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}+\frac{\cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}}\right)^2$$

$$2\sin x\cos x+1=(\cos x+\sin x)^2$$

$$2\sin x\cos x+1=\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x$$

$$2\sin x\cos x+1=2\sin x\cos x+1 \;\Rightarrow\; \text{rovnost platí.}$$

Při zjednodušování výrazů jsou naše možnosti omezenější, nemůžeme odstraňovat zlomky vynásobením, můžeme pouze rozšiřovat, násobit jedničkou nebo přičítat nulu (samozřejmě ve vhodných tvarech).

Zjednodušujeme výraz $\frac{\cos^3 x-\cos x}{\sin^3 x-\sin x}$.

Nejdříve definiční obor:

zlomek: $\sin^3 x-\sin x=\sin x\left(\sin^2 x-1\right)\neq 0$

- $\sin x\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq k\pi,\; k\in Z$
- $\sin^2-1=-\cos^2 x\neq 0 \;\Rightarrow\; \cos x\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\Rightarrow\; x\in R-\bigcup_{k\in Z}\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\frac{\cos^3 x-\cos x}{\sin^3 x-\sin x}=\frac{\cos x\left(\cos^2 x-1\right)}{\sin x\left(\sin^2 x-1\right)}=\frac{\cos x\left(-\sin^2 x\right)}{\sin x\left(-\cos^2 x\right)}=\frac{\cos x\cdot\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg}x$$

Př. 3: Urči definiční obor výrazu a poté ho zjednoduš.

a) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ b) $\frac{\sin x+\cos x}{1+\operatorname{tg}x}$ c) $\frac{\operatorname{tg}x}{\cos x\left(\operatorname{tg}^2 x+1\right)}$

d) $\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x\right)+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

a) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

Definiční obor: dělíme $\Rightarrow\; 1-\cos x\neq 0 \;\Rightarrow\; \cos x\neq 1 \;\Rightarrow\; x\neq 0+k2\pi,\; k\in Z$

$$x\in R-\bigcup_{k\in Z}\{k\cdot 2\pi\}$$

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=1+\cos x$$

b) $\frac{\sin x+\cos x}{1+\operatorname{tg}x}$

Definiční obor:

- dělíme $\Rightarrow$ $1+\operatorname{tg} x \neq 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg} x \neq -1$ $\Rightarrow$ $x \neq -\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k \in Z$
- $\operatorname{tg} x$ $\Rightarrow$ $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

$$x \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi; -\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi\right\}$$

$$\frac{\sin x+\cos x}{1+\operatorname{tg} x}=\frac{\sin x+\cos x}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\sin x+\cos x}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}=\cos x$$

c) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x\left(\operatorname{tg}^2 x+1\right)}$

Definiční obor:

- dělíme $\Rightarrow$ $\cos x \neq 0$ $\Rightarrow$ $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in Z$
- $\operatorname{tg} x$ $\Rightarrow$ $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in Z$

$$x \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x\left(\operatorname{tg}^2 x+1\right)}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x\frac{1}{\cos^2 x}}=\sin x$$

d) $\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x\right)+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

Definiční obor: $\operatorname{tg} x$ $\Rightarrow$ $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $\operatorname{cotg} x$ $\Rightarrow$ $x \neq k\pi$

$$x \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x\right)+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=$$

$$=\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=$$

$$=\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\right)+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=$$

$$\sin^4 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=1^2=1$$

Př. 4: Petáková:
strana 45, cvičení 47 c), f), i), m)
strana 45, cvičení 46 b), c), e), h), m)

Shrnutí: